Abstract. A new method to construct evolution operators for linear integrodifferential problems of parabolic type is given. Also an abstract generalization of the case of nonhomogeneous boundary conditions is treated. This construction is then used to prove a result of convergence to a steady state, for the same type of problem.

Riassunto. Viene presentato un nuovo metodo di costruzione di operatori di evoluzione per problemi integrodifferenziali di tipo parabolico. E' trattata anche una generalizzazione astratta del caso di condizioni al contorno non omogenee. Questa costruzione è poi impiegata per provare in risultato di convergenza a uno stato stazionario, per lo stesso tipo di problema.

Scopo di questo seminario è dare alcuni risultati relativi a problemi misti di tipo parabolico per equazioni integrodifferenziali. Più precisamente, considereremo il problema della costruzione di operatori di evoluzione per equazioni integrodifferenziali di tipo Volterra che forniscano formule di rappresentazione delle soluzioni anche nel caso di condizioni al contorno non omogenee. Perchè i risultati siano applicabili anche allo studio di equazioni quasi lineari, lavoreremo con operatori che dipendono dal tempo in forma solo hölderiana e non differenziabile. Per lavori su argomenti simili (ma con condizioni di derivabilità rispetto al tempo dei coefficienti e con condizioni al contorno omogenee) si veda [AT] and [PR]; citiamo anche due recenti lavori di Garrone, Solonnikov, Vivaldi [GSV1,2] in cui vengono trattate equazioni non lineari (ma trattate mediante linearizzazione) del secondo ordine in spazi di funzioni hölderiane.

Per semplicità noi considereremo una sola condizione al contorno, anche se il metodo presentato è estendibile al caso di un numero qualunque di condizioni (vedi [GU2]). I risultati presentati si possono considerare estensioni di risultati precedenti in cui si consideravano soltanto equazioni di tipo differenziale(vedi [GU1]). Per giustificare le ipotesi astratte che faremo, partiamo da un caso concreto; sia Ω un aperto limitato con la frontiera di classe C^2 in $\mathbb{R}^n$, per $t \in [0, T]$, $A(t,x,\partial_x)$ un operatore propriamente ellittico del secondo ordine, a coefficienti uniformemente continui e limitati su $\overline{\Omega}$; sia poi, per $(t,s) \in \overline{\Delta}_T := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq t \leq T\}$ $C(t,s, x,\partial_x)$ un operatore di ordine minore o uguale a 2 sempre a coefficienti uniformemente continui e limitati su $\overline{\Omega}$; supponendo che i coefficienti di $A(t,x,\partial_x)$ siano almeno continui in (t,x) su $[0, T] \times \overline{\Omega}$ e i coefficienti di $C(t,s, x,\partial_x)$ siano almeno continui in (t,s,x) su $\overline{\Delta}_T \times \overline{\Omega}$, consideriamo, per $s \in [0, T[$, l'equazione

$$(1) \qquad \partial_t u(t,x) = A(t,x,\partial_x)u(t,x) + \int_s^t C(t,\tau,x,\partial_x)u(\tau,x)\, d\tau + f(t,x), \quad s \leq t \leq T$$

ove f è un'assegnata funzione su $[s, T] \times \Omega$. A (1) associamo un'opportuna condizione al contorno, nel seguente modo: sia, per $t \in [0, T]$, $B(t,x,\partial_x)$ un operatore del primo ordine su $\overline{\Omega}$ con coefficienti almeno continui in (t,x), con derivate continue rispetto alle variabili x, per $(t,s) \in \overline{\Delta}_T$ $D(t,s,x,\partial_x)$ un operatore di ordine al più uno, con i coefficienti continui in $(t,s,x) \in \overline{\Delta}_T \times \overline{\Omega}$ dotati di derivate parziali continue rispetto a x nelle variabili (t,s,x).Sia γ l'operatore di traccia su $\partial\Omega$. Associamo a (1) la condizione al contorno

$$(2) \qquad \gamma(B(t,.,\partial_x)u(t,.) + \int_s^t D(t,\tau,.,\partial_x)u(\tau,.)\, d\tau \ - g(t,.)) = 0$$

Supporremo che per ogni $t \in [0, T]$, l'operatore ellittico $A(t,x,\partial_x)$ con la condizione al contorno $\gamma B(t,.,\partial_x)$ costituisca un problema ellittico regolare nel seguente senso: consideriamo il problema dipendente dal parametro λ

$$(3) \qquad \lambda u - A(t,x,\partial_x)u = f, \ \ \gamma(B(t,.,\partial_x)u - g) = 0$$

con $f \in L^p(\Omega)$, $g \in W^{1,p}(\Omega)$, per un fissato $p \in]1, +\infty[$.Supporremo che esistano $R \geq 0$, $C > 0$ tali che per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, con $|\lambda| \geq C$, e con $Re\lambda \geq 0$ il problema (3) abbia un'unica soluzione $u \in W^{2,p}(\Omega)$ per ogni $f \in L^p(\Omega)$ e per ogni $g \in W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre,

$$(4) \qquad |\lambda|\, \|u\|_{0,p} + \|u\|_{2,p} \leq C\, [\, \|f\|_{0,p} + \|g\|_{1,p} + |\lambda|^{1/2}\, \|g\|_{0,p}] \,.$$

La condizione (4) è soddisfatta in molti in molti casi interessanti . Condizioni sufficienti che la implicano sono state date da Agmon (vedi [AG]). Nel lavoro [TE] B. Terreni ha inoltre provato che, se vale (4), vale anche (eventualmente modificando C) la stima

$$(5) \qquad |\lambda|\, \|u\|_{0,p} + \|u\|_{2,p} \leq C\, [\, \|f\|_{0,p} + \|g\|_{1,p} + |\lambda|^{\frac{1-s}{2}}\, \|g\|_{s,p}] \,,$$

per ogni $s \in [0, \frac{1}{p}[$. Sia allora $s \in [0, \frac{1}{p}[$.

Poniamo ora $E_0 := L^p(\Omega)$, $E_1 := W^{2,p}(\Omega)$, $\mathcal{A}(t) : E_1 \to E_0$, $\mathcal{A}(t)u = A(t,x,\partial_x)u$,

$\mathcal{C}(t,s)$: $E_1 \to E_0$, $\mathcal{C}(t,s)u := C(t,s,x,\partial_x)u$. Si ha $E_1 \subseteq E_0$. Se $f \in C([s, T]; E_0)$, posto come al solito $u(t)(x) := u(t,x)$,(1) diventa allora

$$(6) \qquad \partial_t u(t) = \mathcal{A}(t)u(t) + \int_s^t \mathcal{C}(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau + f(t).$$

Poniamo $E_\mu := W^{1,p}(\Omega)$, $F := W^{s,p}(\Omega$, per un certo $s \in [0,\frac{1}{p}[$, $F_\nu := W^{1+s,p}(\Omega)$. F_ν è uno spazio di tipo $\nu := \frac{1+s}{2}$ fra E_0 ed E_1, cioè, $E_1 \subseteq F_\nu \subseteq E_0$ ed esiste $C > 0$ tale che per ogni $f \in E_1$ $\|f\|_{1+s,p} \leq C\, \|f\|_0^{1-\nu}\, \|f\|_1^{\nu}$. Poniamo allora $\mathcal{B}(t) := B(t,x, \partial_x)$, $\mathcal{D}(t,s) := D(t,s,x,\partial_x)$. Allora, $\mathcal{B}(t) \in \mathcal{L}(E_1, E_\mu) \cap \mathcal{L}(F_\nu, F)$. (5) diventa inoltre (indicate rispettivamente con $\|.\|_0$, $\|.\|_1$, $\|.\|_\mu$, $\|.\|_\nu$, $\|.\|_F$ le norme in E_0, E_1, E_μ , F_ν, F):

(7) $$|\lambda|\,\|u\|_0 + \|u\|_1 \leq C\,(\|f\|_0 + \|g\|_\mu + |\lambda|^{1-\nu}\,\|g\|_F\,).$$

Presa allora $g \in C([s, T]; E_\mu)$, riscriviamo la condizione (2) nella forma

(8) $$\gamma(\mathcal{B}(t)u(t) + \int_s^t \mathcal{D}(t,\tau)u(\tau)\,d\tau - g(t)) = 0.$$

Riassumendo, vogliamo studiare un problema "astratto" del tipo

$$\partial_t u(t) = \mathcal{A}(t)u(t) + \int_s^t \mathcal{C}(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau + f(t),$$

(9) $$\gamma(\mathcal{B}(t)u(t) - \int_s^t \mathcal{D}(t,\tau)u(\tau)\,d\tau - g(t)) = 0,$$

$$u(s) = u_0$$

sotto le seguenti ipotesi:

(h1) E_0 ed E_1 sono spazi di Banach con $E_1 \subseteq E_0$ (tutte le immersioni si supporranno d' ora in poi continue), $\mathcal{A} \in C([0, T]; \mathcal{L}(E_1,E_0))$, $\mathcal{C} \in C(\overline{\Delta}_T\,; \mathcal{L}(E_1,E_0))$;

(h2) E_μ, F sono spazi di Banach con $E_\mu \subseteq F$, F_ν è uno spazio di tipo ν ($\in$]0, 1[) fra E_0 ed E_1, $\mathcal{B} \in C([0, T]; \mathcal{L}(E_1, E_\mu)\cap\mathcal{L}(F_\nu,F))$, $\mathcal{D} \in C(\overline{\Delta}_T; \mathcal{L}(E_1, E_\mu)\cap\mathcal{L}(F_\nu,F))$;

(h3) $\gamma \in \mathcal{L}(E_\mu, Z)$ (con Z spazio di Banach);

(h4) esistono $R \geq 0$, $C > 0$ tali che per ogni $t \in [0, T]$, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, con $|\lambda| \geq R$, Re $\lambda \geq 0$, per ogni $f \in E_0$, per ogni $g \in E_\mu$ il problema

(10) $$\lambda u - \mathcal{A}(t)u = f, \qquad \gamma(\mathcal{B}(t)u - g) = 0$$

ha un'unica soluzione $u \in E_1$ e

(11) $$|\lambda|\,\|u\|_0 + \|u\|_1 \leq C\,[\|f\|_0 + \|g\|_\mu + |\lambda|^{1-\nu}\,\|g\|_F.$$

Queste sono le ipotesi base; ne avremo bisogno di qualche altra, ma prima di introdurre queste ulteriori ipotesi precisiamo a che genere di soluzione siamo

interessati; in primo luogo, in (9) considereremo solo il caso $f \in C([s, T]; E_0)$, $g \in C([s, T]; E_\mu)$.

Una soluzione *stretta* di (9) sarà una funzione $u \in C^1([s, T]; E_0) \cap C([s, T]; E_1)$, verificante (9). Osserviamo che per l'esistenza di una soluzione stretta è necessario che $u_0 \in E_1$ e che $\gamma(\mathcal{B}(s)u_0 - g(s)) = 0$.

Una soluzione *classica* di (9) è una funzione $u \in C^1(]s, T]; E_0) \cap C(]s, T]; E_1) \cap C([s, T]; E_0)$, tale che per ogni $t \in\ ]s, T]$ gli integrali $\int_s^t \mathcal{C}(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau$, $\int_s^t \mathcal{D}(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau$ esistono in senso generalizzato (come limiti, rispettivamente in E_0 e in E_μ, di

$\int_{s+\varepsilon}^t \mathcal{C}(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau$, $\int_{s+\varepsilon}^t \mathcal{D}(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau$ per $\varepsilon \to 0^+$).

Infine, una soluzione *forte* di (9) è una funzione $u \in C([s, T]; E_0)$, tale che esiste una successione $(u_k)_{k\in \mathbb{N}}$ in $C^1([s, T]; E_0) \cap C([s, T]; E_1)$ convergente a u in $C([s, T];E_0)$, e tale che $\|u'_k(t) - \mathcal{A}(t)u_k(t) - \int_s^t \mathcal{C}(t,\tau)\, u_k(\tau)\, d\tau - f(t)\|_0$, $\|\gamma(\mathcal{B}(t)u_k(t) - \int_s^t \mathcal{D}(t,\tau)\, u_k(\tau)\, d\tau - g(t))\|_Z \to 0$ uniformemente su $[s, T]$.

Vale il seguente risultato:

Teorema 1. *Siano soddisfatte le ipotesi* (h1)-(h4)*; supponiamo inoltre che*

(h5) $\mathcal{A} \in C^\beta([0, T]; \mathcal{L}(E_1,E_0))$, $\mathcal{C} \in C^\beta(\bar{\Delta}_T ; \mathcal{L}(E_1,E_0))$, $\mathcal{B} \in C^\beta([0, T]; \mathcal{L}(E_1, E_\mu) \cap \mathcal{L}(F_\nu,F))$, $\mathcal{D} \in C^\beta(\bar{\Delta}_T; \mathcal{L}(E_1, E_\mu) \cap \mathcal{L}(F_\nu,F))$, *con* $\beta + \nu > 1$;

(h6) *esiste una successione* $(P_n)_{n\in \mathbb{N}}$ *in* $\mathcal{L}(E_0, E_1)$ *tale che per ogni* $f \in E_0$

$\|P_n f - f\|_0 \to 0$ $(n \to +\infty)$, *per ogni* $f \in E_1$ $\|P_n f - f\|_1 \to 0$ $(n \to +\infty)$.

Sia $s \in [0, T[$. *Se* $u_0 \in E_0$, $f \in C([s, T]; E_0)$, $g \in C([s, T]; E_\mu)$, (9) *ha un'unica soluzione forte* u *su* $[s, T]$*; inoltre, se* $f \in C^\varepsilon([s, T]; E_0)$ *e* $g \in C^\varepsilon([s, T]; E_\mu) \cap C^{1-\nu+\varepsilon}([s, T]; F)$*, la soluzione forte* u *è classica; se poi si ha anche* $u_0 \in E_1$ *e* $\gamma(\mathcal{B}(s)u_0 - g(s)) = 0$*, la soluzione forte è stretta.*

Applichiamo ora questo risultato al nostro problema di partenza; in questo caso F_ν può essere un qualunque spazio $W^{1+s,p}(\Omega)$ con $0 \le s < \frac{1}{p}$ e, in corrispondenza di s ν =

$\frac{1+s}{2}$. Fissato s, deve essere $\beta > 1 - \nu = 1 - \frac{1+s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{s}{2}$. Evidentemente, conviene prendere s più grandepossibile; dunque, il risultato è applicabile se $\beta > \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p})$.
Consideriamo infine l'ipotesi (h6); dobbiamo costruire una successione di operatori $(P_n)_{n\in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(L^p(\Omega), W^{2,p}(\Omega))$ tali che per ogni $f \in L^p(\Omega)$ $\|P_nf - f\|_{0,p} \to 0$, per ogni $f \in W^{2,p}(\Omega)$, $\|P_nf - f\|_{2,p} \to 0$. Sia P un operatore di prolungamento continuo da $L^p(\Omega)$ a $L^p(\mathbb{R}^n)$, che porta $W^{2,p}(\Omega)$ in $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$; l'esistenza di un operatore di questo tipo è conseguenza delle ipotesi di regolarità fatte su $\partial\Omega$ (vedi [AD]). Sia Δ l' operatore di Laplace definito su $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, pensato come operatore non limitato in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Δ genera un semigruppo analitico in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sia infine R l'operatore di restrizione da $\mathbb{R}^n$ a Ω ; poniamo $P_n := Rn(n - \Delta)^{-1} P$. Tenuto conto che la parte di Δ in $W^{2,p}(\Omega)$ genera un semigruppo analitico in $W^{2,p}(\Omega)$, è immediato verificare che la successione $(P_n)_{n\in \mathbb{N}}$ ha le proprietà volute.

Torniamo ora al caso astratto generale; si può dimostrare che è possibile rappresentare la soluzione forte di (9) nella forma

$$u(t) = U(t,s)u_0 + \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)\, d\tau + \int_s^t V(t, \tau)g(\tau)\, d\tau, \tag{12}$$

ove gli operatori di evoluzione U(t,s) e V(t,s) godono delle seguenti proprietà:

Teorema 2. (I)U(t,s) *è definito per* $(t,s) \in \bar{\Delta}_T$ *a valori in* $\mathcal{L}(E_0)$ *e* $(t,s,f) \to U(t,s)f$ *è continua da* $\bar{\Delta}_T \times E_0$ *a* E_0 ;

(II) *l'applicazione* $(t,s) \to U(t,s)$ *è continua da* $\Delta_T := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le s < t \le T\}$ *a valori in* $\mathcal{L}(E_0, E_1)$;

(III) *se* t =s, $U(t,s) = U(s,s) = I_{E_0}$;

(IV)*per un certo* $C > 0$ $\|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \le C$ $((t,s) \in \bar{\Delta}_T)$, $\|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} \le C(t - s)^{-1}$, $((t,s) \in \Delta_T)$;

(V) $V \in C(\Delta_T, \mathcal{L}(E_\mu, E_1))$;

(VI) *esiste* $C > 0$ *tale che per ogni* $(t,s) \in \Delta_T$, *per ogni* $g \in E_\mu$,

$$\|V(t,s)g\|_0 \le C(\|g\|_\mu + (t-s)^{\nu-1}\|g\|_F, \quad \|V(t,s)g\|_1 \le C(t-s)^{-1}(\|g\|_\mu + (t-s)^{\nu-1}\|g\|_F).$$

Vogliamo anche dare una formula, che generalizzi la ben nota identità per gli operatori di evoluzione per equazioni differenziali $U(t,\sigma)U(\sigma,s) = U(t,s)$; possiamo innanzi tutto dire che, data una qualunque soluzione stretta u su $[s, T]$, con dati u_0, f, g e date $c \in C^\beta(\bar{\Delta}_T, \mathcal{L}(E_1,E_0))$, $d \in C^\beta(\bar{\Delta}_T, \mathcal{L}(E_1,E_\mu))$, è possibile provare che esiste $C > 0$ tale che, per $0 \le s \le t \le T$, si ha

$$\left\| \int_s^t c(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau \right\|_0 + \left\| \int_s^t d(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau \right\|_\mu \le C[\|u_0\|_0 + \|f\|_{C([s,T];E_0)} + \|g\|_{C([s,T];E_\mu)}];$$

questa disuguaglianza dice che, per continuità, è possibile estendere gli integrali a ogni soluzione forte; data una soluzione forte u, indicheremo i valori di questi integrali nel senso generalizzato precisato rispettivamente con $(*)\text{-}\int_s^t c(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau$ e con $(*)\text{-}\int_s^t d(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau$. Si può allora provare che si ha, per $0 \le s \le \sigma \le t \le T$

$$U(t,s) = U(t,\sigma)U(\sigma,s) + \int_\sigma^t U(t,\tau)(*)\text{-}\int_s^\sigma \mathcal{C}(\tau,\rho)U(\rho,s)\, d\rho)d\tau$$

$$- \int_\sigma^t V(t,\tau)\,(*)\text{-}\int_s^\sigma \mathcal{D}(\tau,\rho)U(\rho,s)\, d\rho)d\tau.$$

Vogliamo ora dare un risultato di convergenza (per $t \to +\infty$) a uno stato stazionario delle soluzioni; cominciamo dal caso semplice in cui in (9) $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}$ per ogni $t \ge 0$, $\mathcal{C}(t,s) = \mathcal{C}$, $\mathcal{D}(t,s) = \mathcal{D}$ per ogni $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, con $0 \le s \le t < +\infty$. In questo caso è naturale applicare la trasformata di Laplace, che porta al seguente problema dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$:

$$(13) \quad \lambda u - \mathcal{A}u - \lambda^{-1}\mathcal{C}u = f, \quad \gamma(\mathcal{B}u + \lambda^{-1}\mathcal{D}u - g) = 0,$$

con $f \in E_0$, $g \in E_\mu$. L'ipotesi naturale è la seguente

(h_∞): esiste $R > 0$ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ con $\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$, oppure $|\lambda| \le R$, per ogni $f \in E_0$, per ogni $g \in E_\mu$, il problema (13) ha un'unica soluzione $R(\lambda)f + N(\lambda)g \in E_1$; inoltre gli operatori $R(\lambda)$ e $N(\lambda)$ sono prolungabili analiticamente (pensanndo R e N come funzioni analitiche, rispettivamente a valori in $\mathcal{L}(E_0,E_1)$ e in $\mathcal{L}(E_\mu,E_1)$) a 0.

Indichiamo con R(0) e N(0) i prolungamenti analitici in 0. Vediamo qualche esempio: in questi esempi avremo sempre $E_0 = L^p(\Omega)$, con $1< p < +\infty$, ed $E_1 = W^{2,p}(\Omega)$.

Esempio 1. Sia $E_\mu = W^{2,p}(\Omega)$, $\mathcal{A} = \Delta$, $\mathcal{C} = 0$, $\mathcal{B} = I$, $\mathcal{D} = 0$; abbiamo il problema

$$\lambda u - \Delta u = f, \gamma(u - g).$$

Ovviamente in questo caso R(0)f è la soluzione con $\lambda = 0$ e $g = 0$, mentre N(0)g la soluzione con $\lambda = 0$ e $f = 0$.

Esempio 2. Sia $E_\mu = W^{2,p}(\Omega)$, $\mathcal{A} = \Delta - 1$, $\mathcal{C} = \Delta$, $\mathcal{B} = I$, $\mathcal{D} = 0$; abbiamo il problema

$$\lambda u - (\Delta - 1)u - \lambda^{-1}\Delta u = f, \gamma(u - g) = 0.$$

E' facile vedere che in questo caso R(0)f = 0, N(0)g è la soluzione di $\Delta u = 0$, $\gamma(u - g) = 0$.

Esempio 4. Sia $E_\mu = W^{1,p}(\Omega)$, $\mathcal{A} = \Delta - 1$, $\mathcal{C} = \Delta$, $\mathcal{B} = \mathcal{D}$ = estensione a $\bar{\Omega}$ di $\frac{\partial}{\partial \nu}$; abbiamo il problema $\lambda u - (\Delta - 1)u - \lambda^{-1}\Delta u = f, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda^{-1} \frac{\partial u}{\partial \nu} - \gamma g = 0$. In questo caso, si può vedere che R(0)f è la funzione costante $\frac{1}{L_3(\Omega)} \int_\Omega f\, dx$, N(0)g è la funzione costante $\frac{1}{L_3(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \gamma g\, ds$.

Si può allora provare questo primo risultato:

Lemma 1. *Siano soddisfatte le ipotesi* (h1)-(h5). *con* [0, T] *sostituito da* $[0, +\infty[$ *e* $\bar{\Delta}_T$ *da* $\bar{\Delta}_\infty := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le s \le t\}$ *; sia inoltre* $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}$, $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}$ *per ogni* $t \in [0, +\infty[$, $\mathcal{C}(t,s) = \mathcal{C}$, $\mathcal{D}(t,s) = \mathcal{D}$ *per ogni* $(t,s) \in \bar{\Delta}_\infty$. *Supponiamo che sia soddisfatta* (h∞). *Indichiamo con* u *la soluzione forte su* $[s, +\infty[$ $(0 \le s < +\infty)$ *di* (9) *con dati* $u_0 \in E_0$, $f \in C([s, +\infty[; E_0)$, $g \in C([s, +\infty[; E_\mu)$; *sia inoltre* $E_0\text{-}\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, $E_\mu\text{-}\lim_{t\to\infty} g(t) = g(\infty)$. *Allora,* $E_0\text{-}\lim_{t\to\infty} u(t) = R(0)f(\infty) + N(0)g(\infty)$.

Il lemma 1 ha un aspetto non del tutto naturale: sia infatti $u_0 \in E_1$; poniamo $u(t):=u_0$ per ogni $t \geq s$; allora u è la soluzione forte con dati u_0, f, g, essendo

$$f(t) = - \mathfrak{A}u_0 - (t - s)\mathfrak{C}u_0, \quad g(t) = \mathfrak{B}u_0 + (t - s)\mathfrak{D}u_0.$$

Si osservi che f e g non convergono. Il lemma 1 ammette tuttavia la seguente generalizzazione:

Lemma 2. *Siano soddisfatte le ipotesi del lemma* 1; *supponiamo però che esista* $\bar{u} \in E_1$ *tale che* $E_0\text{-}\lim_{t\to\infty} (f(t) + t\,\mathfrak{C}\,\bar{u}) = f(\infty)$, $E_\mu\text{-}\lim_{t\to\infty} (g(t) - t\,\mathfrak{D}\,\bar{u}) = g(\infty)$. *Allora,*

$$E_0\text{-}\lim_{t\to\infty} u(t) = R(0)[f(\infty) - \mathfrak{C}\,\bar{u}\,] + N(0)[g(\infty) - \mathfrak{D}\,\bar{u}\,].$$

Si vede facilmente dal lemma 2 che per ogni $u \in E_1$ $R(0)\mathfrak{A}u = N(0)\mathfrak{D}u$.

Vogliamo ora generalizzare questo risultato; un primo passo è il seguente

Lemma 3. *Siano soddisfatte le ipotesi* (h1)-(h3) *e* (h4) *per ogni* $T \in\,]0, +\infty[$; *siano poi soddisfatte* (h5), *con costanti di hölderianità indipendenti da* T *e* (h6); *supponiamo che* $\lim_{t\to+\infty} \mathfrak{A}(t) = \mathfrak{A}$ *in* $\mathcal{L}(E_1,E_0)$, $\lim_{t\to+\infty} \mathfrak{B}(t) = \mathfrak{B}$ *in* $\mathcal{L}(E_1,E_\mu)$, $\mathfrak{C}(t,s) = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}(t,s) = \mathfrak{D}$ *per ogni* $(t,s) \in \bar{\Delta}_\infty$; *supponiamo infine che sia soddisfatta l'ipotesi* ($h\infty$); *si hanno allora le stesse conclusioni del lemma* 2.

Resta da trattare il caso in cui $\mathfrak{C}(t,s)$ e $\mathfrak{D}(t,s)$ non sono costanti; è pensabile che, se al tendere di $t \to +\infty$, si ha (in qualche senso da precisare) la convergenza dei coefficienti a un problema indipendente da t per cui la convergenza a uno stato stazionario delle soluzioni sia verificata, anche questo caso possa essere trattato; è tuttavia necessaria qualche precauzione; si consideri infatti il seguente esempio: consideriamo il problema integrodifferenziale in $\mathbb{C}$

$$u'(t) = - u(t) + \frac{1}{1+t}\int_0^t u(\tau)\, d\tau + f(t), \quad u(0) = u_0 \ (\in \mathbb{C}). \tag{14}$$

Si ha in tale caso $\mathfrak{C}(t,s) = \frac{1}{1+t}$ (per $0 \le s \le t < +\infty$); per ogni $s \ge 0$ $\lim_{t \to +\infty} \mathfrak{C}(t,s) = 0$; consideriamo il problema "limite"

$$(15) \qquad u'(t) = - u(t) + f(t),\ u(0) = u_0.$$

Si vede subito che le ipotesi del lemma 2 sono soddisfatte (ponendo, ad esempio, $E_\mu=\{0\}$). Si ha $R(0)f = f$ per ogni $f \in \mathbb{C}$; dunque, se $f(t) \to f(\infty)$ $(t \to +\infty)$, ogni soluzione u di (15) tende a $f(\infty)$. Tuttavia, ad esempio, la soluzione di (14) per $f(t) = 1$ e $u_0 = 0$ è $t \to \ln(t+1)$, che non è neppure limitata; come è intuibile, ciò dipende dal fatto che, nonostante si abbia $\mathfrak{C}(t,s) \to 0$ $(t \to +\infty)$, non c'è una convergenza "di tipo L^1", perchè $\int_0^t \mathfrak{C}(t,s)\, ds = \frac{t}{1+t} \to 1$ $(t \to +\infty)$. Vale, in effetti, il seguente risultato:

Teorema 3. *Siano soddisfatte le ipotesi del lemma 3 con l'eccezione di* $\mathfrak{C}(t,s) = \mathfrak{C}$ *per ogni* (t,s) *e* $\mathfrak{D}(t,s) = \mathfrak{D}$ *per ogni* (t,s)*; supponiamo invece che*

(k1) $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ *sono uniformemente hölderiane di esponente* β *in* $\bar{\Delta}_\infty$, *rispettivamente a valori in* $\mathcal{L}(E_1,E_0)$ *e in* $\mathcal{L}(E_1,E_\mu) \cap \mathcal{L}(F_\nu; F)$;

(k2) $\mathfrak{C}(t,s) = \mathfrak{C} + I(t,s)$ *con* $\lim_{t \to +\infty} I(t,s) = I(s)$ *in* $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ *per ogni* $s \ge 0$,

$$\int_0^{+\infty} \|I(s)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)} + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\|I(s) - I(t)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}}{|t - s|^{2-\nu}}\, ds\, dt < +\infty,$$

$$\lim_{t \to +\infty} \left\{ \int_0^t \|I(t,s)-I(s)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}\, ds + \int_0^t\int_0^t \frac{\|I(t,s) - I(t,\sigma) - I(s) + I(\sigma)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}}{|s - \sigma|^{2-\nu}}\, ds\, d\sigma \right\}$$

$= 0$;

(k3) $\mathfrak{D}(t,s) = \mathfrak{D} + J(t,s)$ *con* $\lim_{t \to +\infty} J(t,s) = J(s)$ *in* $\mathcal{L}(E_1, E_\mu) \cap \mathcal{L}(F_\nu, F)$ *per ogni* $s \ge 0$,

$$\int_0^{+\infty} \|J(s)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_\mu)\cap\mathcal{L}(F_\nu, F)}\, ds + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\|J(s) - J(t)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_\mu)\cap\mathcal{L}(F_\nu, F)}}{|t - s|^{2-\nu}}\, ds\, dt < +\infty,$$

$$\lim_{t \to +\infty} \left\{ \int_0^t \|J(t,s)-J(s)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}\, ds \right.$$

$$+\int_0^t\int_0^t \frac{\|J(t,s) - J(t,\sigma) - J(s) + J(\sigma)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_\mu)\cap\mathcal{L}(F_\nu,F)}}{|s-\sigma|^{2-\nu}}\, ds\, d\sigma \} = 0;$$

(k4) *l'ipotesi* ($h\infty$) *è soddisfatta (con* $\mathfrak{A}$ *e* $\mathfrak{B}$ *come nel lemma* 3).

Sia u *la soluzione forte in* $[s, +\infty[$, *con dati* $u_0 \in E_0$, $f \in C([s, +\infty[; E_0)$, $g \in C([s, +\infty[; E_\mu)$, $f(t) = -t\,\mathfrak{C}v_0 + f_\infty + o(1)$, $g(t) = t\,\mathfrak{D}v_0 + g_\infty + o(1)$ $(t \to +\infty)$ *per qualche* $v_0 \in E_1$. *Allora*

(I)*esistono(rispettivamente in* E_0 *e in* E_μ*)*

$$\lim_{t\to+\infty} (*)\text{-}\int_s^t I(\tau)\, u(\tau)\, d\tau := (*)\text{-}\int_s^{+\infty} I(\tau)\, u(\tau)\, d\tau,\ \lim_{t\to+\infty} (*)\text{-}\int_s^t J(\tau)\, u(\tau)\, d\tau := (*)\text{-}\int_s^{+\infty} J(\tau)\, u(\tau)\, d\tau;$$

(II) *esiste* $E_0\text{-}\lim_{t\to\infty} u(t) = \{1 + R(0)\mathfrak{A} - N(0)\mathfrak{B}\}v_0 + R(0)\{f_\infty + (*)\text{-}\int_s^{+\infty} I(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\}$

$$+ N(0)\{g_\infty - (*)\text{-}\int_s^{+\infty} J(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\};$$

(III)*se* $t \to f(t) + t\mathfrak{C}v_0$ *è in* $C^\varepsilon([s,+\infty[;E_0)$, $t \to g(t) - t\,\mathfrak{D}v_0 \in C^\varepsilon([s,+\infty[;E_\mu) \cap C^{1-\nu+\varepsilon}([s, T[;F)$ *per qualche* $\varepsilon > 0$, *la convergenza della soluzione è in* E_1.

Ci limitiamo a osservare che la convergenza richiesta di I(t,.) a I e di J(t,.) a J equivale alla convergenza nello spazio di Besov $B^{1-\nu}_{1,1}(\mathbb{R}^+; \mathcal{L}(E_1,E_0))$ di $I^0(t,.)$ a I e nello spazio di Besov $B^{1-\nu}_{1,1}(\mathbb{R}^+; \mathcal{L}(E_1,E_\mu))\cap B^{1-\nu}_{1,1}(\mathbb{R}^+; \mathcal{L}(F_\nu,F))$ di $J^0(t,.)$ a J, ove $I^0(t,.)$ e $J^0(t,.)$ sono i prolungamenti con lo 0 di I(t,.) e J(t,.) a tutto $\mathbb{R}^+$.

Una semplice applicazione di questo risultato è che, ad esempio, se in (14) sostituiamo a $\frac{1}{1+t}$ $\frac{1}{(1+t)^{1+\varepsilon}}$ con $\varepsilon > 0$ arbitrario, si ha che, se $f \to f(\infty)$ $(t \to +\infty)$, la soluzione u tende a $f(\infty)$.

Bibliografia

[AD] R. Adams, "Sobolev spaces", Academic Press (1975).

[AG] S. Agmon, "On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems", Comm. Pure Appl. Math. 15, 119-147 (1962).

[AT] P. Acquistapace, B. Terreni, "Existence and sharp regularity results for linear parabolic non-autonomous integro-differential equations", Israel Journal Math. vol.53, n. 3, 257-303 (1986);

[GSV1] M. G. Garrone, V.A. Solonnikov, M.A. Vivaldi, "Quasi-linear, integro-differential, parabolic problems with non homogeneous conditions", Houston Journ. Math., vol. 18, n. 4, 481-532 (1992);

[GSV1] M. G. Garrone, V.A. Solonnikov, M.A. Vivaldi, "Problèmes intégro-différentiels complètement non linéaires", C.R.Acad. Sci. Paris, t. 316, série I, 245-248 (1993).

[GU1] D. Guidetti, "Abstract linear parabolic problems with nonhomogeneous boundary conditions", in "Semigroup theory and evolution equations", vol. 135 di Lect. Notes Pure Appl. Math., ed. Dekker (1991).

[GU2] D. Guidetti, lavoro in preparazione.

[PR] J. Prüss, " On resolvent operators for linear integro-differential equations of Volterra type", J. Int. Equ. 5, 211-236 (1983).

[TE] B. Terreni, "Nonhomogeneous initial boundary value problems for linear parabolic systems", Studia Mathematica XCII, 141-175 (1989).